

## IL MODELLO DI RUTHEFORD

### L'intuizione di Rutherford

Il modello di Thomson non spiega come si possano avere scattering di particelle  $\alpha$  per ampiezze elevate dell'angolo di deflessione. In particolare, per angoli compresi tra  $90^\circ$  e  $180^\circ$ , prevede una frazione di particelle ridotta di un fattore di  $10^{3496}$  rispetto a quella rivelata negli esperimenti di Geiger-Marsden. L'ipotesi alla base del modello di Thomson comporta che in tali esperimenti si abbiano *piccole* deviazioni delle particelle  $\alpha$  dopo un *numero elevato di interazioni* con gli atomi della lamina. Era del resto inaspettato che alcune particelle fossero addirittura retrodiffuse a un angolo di  $180^\circ$ . Lo stesso Rutherford dichiarò [1]:

*"È stato forse l'episodio più incredibile della mia vita. Fu come sparare un proiettile di 15 pollici su un fazzoletto di carta e vederlo rimbalzare indietro fino a colpirmi"*

Rutherford sovvertì l'ipotesi di Thomson e ipotizzò che la deviazione di una particella  $\alpha$  fosse dovuta all'interazione con un singolo atomo. Thomson aveva previsto una deviazione angolare media dell'ordine di  $\theta \approx 10^{-4}$  rad, ipotizzando che il raggio atomico fosse dell'ordine di  $10^{-10}$  m. Rutherford immaginò, al contrario, che solo l'interazione coulombiana tra le particelle  $\alpha$  e la regione positiva dell'atomo potesse essere tanto intensa da generare scattering anche ad ampi angoli.

Negli stessi anni il fisico giapponese Hantaro Nagaoka aveva ipotizzato un modello atomico, ipotizzando che le cariche erano impenetrabili e che il modello a panettone di Thomson non era quindi sostenibile [2]. Rutherford si rifecce a questa intuizione e ipotizzò che la regione contenente la carica positiva dell'atomo avrebbe dovuto quindi essere molto più ridotta per determinare elevati valori di intensità della repulsione coulombiana. Rutherford stimò che per ottenere una deviazione media di  $\theta \approx 1$  rad fosse necessario che la regione positiva fosse confinata in una sfera con un raggio dell'ordine di  $10^{-14}$  m.

### Il modello di Rutherford

Le ipotesi del modello atomico di Rutherford possono così essere riassunte:

- L'atomo è costituito da una regione di spazio delle dimensioni di  $10^{-10}$  m, in cui si trovano elettroni e cariche positive confinate in una regione di dimensioni dell'ordine di  $10^{-14}$  m, detta nucleo
- Gli scattering ad angoli inferiori al grado sessagesimale vengono ricondotti all'interazione con gli elettroni e non vengono considerati
- Lo scattering delle particelle  $\alpha$  è dovuto all'interazione coulombiana con il nucleo
- Vengono considerati solo elementi pesanti con numero di massa  $A \gg 4$ , in modo da trascurare l'effetto dell'interazione coulombiana sul nucleo, che può essere considerato fermo nello spazio
- Si ipotizza che la particella  $\alpha$  non penetri nel nucleo, in modo da considerare le cariche interagenti come puntiformi
- Non vengono utilizzate correzioni relativistiche supponendo che la velocità delle particelle  $\alpha$  assuma valori non superiori a  $v \approx \frac{1}{20}c$

In questo modo possono anche solo qualitativamente essere spiegati tutti gli effetti misurati negli esperimenti di Geiger-Marsden [Fig. 1]

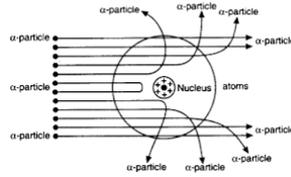


Fig. 1: interazioni delle particelle  $\alpha$  con un nucleo atomico: le particelle piú lontane vengono deviate solo leggermente, le particelle che urtano frontalmente il nucleo vengono retrodiffuse

### Deflessioni e retrodiffusioni delle particelle $\alpha$

Un'analisi piú specifica permette di ottenere una descrizione dettagliata. Se si indica con  $b$  la distanza tra la traiettoria della particella  $\alpha$  e la retta ad essa parallela su cui si trova il nucleo [Fig. 2], si può facilmente dimostrare che tale distanza, detta parametro di impatto, resta invariata al termine dell'interazione.

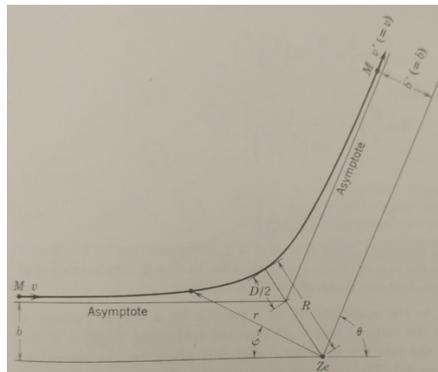


Fig. 2: interazione con un nucleo atomico:  $b$  parametro di impatto,  $\theta$  deviazione angolare,  $\varphi$  coordinata polare,  $r$  distanza dal nucleo

Indicate con  $v$  e  $v'$  i moduli delle velocità della particella  $\alpha$  rispettivamente prima e dopo l'interazione con il nucleo, e con  $b$  e  $b'$  i rispettivi parametri di impatto, con  $M$  la sua massa, si può affermare che il momento angolare  $\vec{L}$  della particella  $\alpha$  si conserva dato che l'interazione coulombiana è radiale. Sfruttando l'ipotesi relativa al nucleo che viene considerato fisso nello spazio, si può assumere che anche l'energia cinetica della particella  $\alpha$  rimanga costante, prima e dopo l'interazione.

Si può quindi scrivere:

$$\begin{cases} Mvb = Mv'b' \\ \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mv'^2 \end{cases}$$

da cui si ricava l'uguaglianza dei parametri di impatto,  $b = b'$ , e delle velocità  $v = v'$ .

Se si definisce con  $D$  la distanza dal nucleo alla quale l'energia potenziale della particella  $\alpha$  eguaglia la sua energia cinetica ovvero se vale la condizione

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{D} = \frac{1}{2}Mv^2 \tag{1}$$

Nel caso di urto frontale ( $b = 0$ )  $D$  rappresenta la minima distanza dal nucleo che può essere raggiunta. È inoltre possibile ricavare in coordinate polari ( $r, \varphi$ ) l'equazione della traiettoria seguita dalla particella  $\alpha$ , che risulta iperbolica [3]:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b} \sin \varphi + \frac{D}{2b^2} (\cos \varphi - 1) \quad (2)$$

Nel caso in cui  $r \rightarrow \infty$  la deviazione angolare  $\theta$  tende a  $\pi - \varphi$ . In questo caso l'equazione (2) si riduce a una semplice relazione che lega la deviazione angolare  $\theta$ , il parametro di impatto  $b$  e la distanza  $D$ :

$$\cot g \frac{\theta}{2} = \frac{2b}{D} \quad (3)$$

Si può inoltre dimostrare che il valore  $D$  rappresenta effettivamente la minima distanza  $R$  di avvicinamento al nucleo in uno scattering frontale ( $\theta = \pi$ ). Sostituendo nell'equazione (2) il valore  $b = 0$  e sfruttando l'equazione (3) si ottiene infatti:

$$R = \frac{D}{2} \left[ 1 + \frac{1}{\sin \left( \frac{\theta}{2} \right)} \right]$$

che per  $\theta = \pi$  assume valore pari a  $D$ .

### Statistica angolare e sezione d'urto differenziale

Così come era accaduto nello sviluppo delle ipotesi del modello atomico di Thomson, anche per il modello di Rutherford è possibile valutare la relazione tra il rapporto del numero  $N(\theta)d\theta$  delle particelle  $\alpha$  deviate tra l'angolo  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  e il numero  $I$  di particelle  $\alpha$  che attraversano la lamina in funzione dell'angolo  $\theta$ , per il quale si ottiene [2]:

$$\frac{N(\theta)d\theta}{I} = \frac{\pi}{8} \rho t D^2 \frac{\sin \theta d\theta}{\sin^4 \left( \frac{\theta}{2} \right)} \quad (4)$$

dove  $\rho$  e  $t$  sono rispettivamente la densità e lo spessore della lamina. Dall'equazione (4) si ricava l'espressione della sezione d'urto differenziale  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  proporzionale alla probabilità di trovare particelle  $\alpha$  diffuse nella porzione di calotta sferica individuata tra gli angoli solidi  $\Omega$  e  $\Omega + d\Omega$ , come mostrato in Fig. 3.

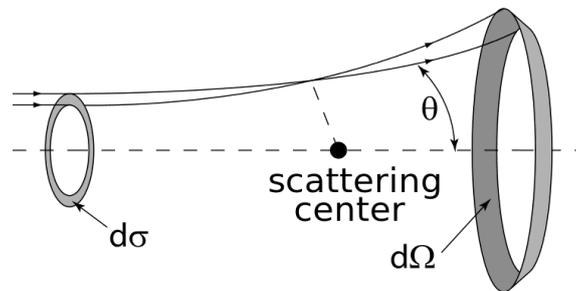


Fig. 3: la regione indicata rappresenta la porzione di calotta sferica individuata tra gli angoli solidi  $\Omega$  e  $\Omega + d\Omega$

Si ottiene che la sezione d'urto differenziale vale:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{zZe^2}{2Mv^2}\right) \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (5)$$

### I risultati sperimentali a confronto con il modello di Rutheford

I dati raccolti sperimentalmente confermano la validità del modello di Rutheford. In particolare si possono trarre le seguenti conclusioni:

- Osservando l'espressione (5) e confrontandola con i risultati ottenuti dal modello di Thomson, appare evidente che la distribuzione di probabilità di ottenere una particella  $\alpha$  sotto un angolo fissato diminuisce all'aumentare dell'ampiezza dell'angolo stesso, anche se nel modello di Rutheford questa diminuzione è molto meno rapida. Una verifica sperimentale ottenuta sfruttando lamine di argento e d'oro, in un range angolare variabile da  $5^\circ$  a  $150^\circ$  in cui la probabilità subisce una riduzione di 5 ordini di grandezza, conferma le previsioni del modello di Rutheford con una discrepanza di qualche unità percentuale.
- La proporzionalità diretta tra la frazione differenziale  $N(\theta)d\theta$  e lo spessore  $t$  presente nell'espressione (4) è confermata per ogni elemento indagato
- Utilizzando fasci di particelle  $\alpha$  con diversa velocità, si valida la proporzionalità inversa tra la sezione d'urto differenziale  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  e l'energia cinetica  $\frac{Mv^2}{2}$  presente nell'espressione (5)
- Misurando i valori della sezione differenziale, si può ottenere una stima del numero atomico dell'elemento costituente la lamina, che può essere confrontato con quello reale della lamina. I dati mostrano un completo accordo tra le previsioni date dall'equazione (5) e il riscontro sperimentale.

L'ultima osservazione permette di sottolineare che gli esperimenti di Geiger-Marsden effettuati su campioni omogenei costituiti da elementi non noti, unitamente ai risultati forniti dal modello di Rutheford, permettono di ricavare il numero atomico dell'elemento e quindi informazioni indirette sul campione, senza comprometterne minimamente la struttura fisica. Questa modalità di analisi si è configurata come una delle prime tecniche non distruttive di caratterizzazioni dei materiali.

### Valutazione del raggio nucleare

Il valore di  $R$  calcolato per  $\theta = \pi$  fornisce una buona approssimazione del raggio nucleare. Dall'equazione (1) è possibile ricavare l'espressione di  $D$  in funzione del numero atomico  $Z$ , ottenendo:

$$R_{\theta=\pi} = D = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{Mv^2}$$

Appare evidente che il valore di  $R_{\theta=\pi}$  decresce qualora il numero atomico decresca. È quindi ragionevole domandarsi per quale atomo leggero il valore di  $R_{\theta=\pi}$  non rappresenti più una buona stima del raggio nucleare. Si può affermare che  $R_{\theta=\pi}$ , che dipende anche dall'energia della particella  $\alpha$ , rappresenta a buon diritto il raggio nucleare quando iniziano a sorgere delle discrepanze tra il numero di particelle retrodiffuse effettivamente misurate e quelle attese. Come mostra la Fig. 4 in cui sono rappresentati dati relativi a un esperimento di Rutheford su lamina di alluminio,  $R_{\theta=\pi}$  rappresenta il limite inferiore per una classe di valori ottenuti al variare dell'energia cinetica della particella

$\alpha$ . In questo caso si può affermare che il nucleo di alluminio ha un raggio dell'ordine di  $10^{-14}$  m, ossia circa 10 F.

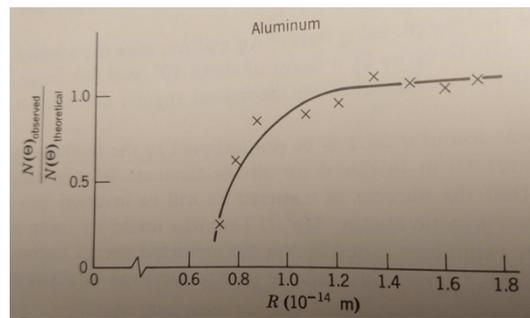


Fig. 4: nel grafico è riportato il valore del rapporto tra le particelle  $\alpha$  retrodiffuse e quelle attese in funzione del valore di  $R_{\theta=\pi}$ . Il rapporto si assesta su una soglia unitaria per un valore di  $R$  prossimo a  $1.2 \cdot 10^{-14}$  m.

o quanto meno un estremo superiore che, per le ipotesi fatte, non può essere oltrepassato. Ripetendo l'esperimento di Rutherford con fogli metallici differenti si sono ottenuti i valori di  $R$  per diversi nuclei (per l'alluminio, per esempio, si ottiene  $R \approx 10^{-14}$  m).

#### Bibliografia

- [1] C. Andrade, *Rutherford and the Nature of the Atom*, Doubleday & Company Inc., Garden City, New York, 1964
- [2] D. Greenberger, K. Hentschel, F. Weinert, *Compendium of Quantum Physics*, SpringerLink, 2009
- [3] R. Eisberg, R. Resnick, *Quantum Physics*, John Wiley & Sons, New York, 1985